

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică- informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

Scoala in Papuci

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Calculați $100^{\frac{\lg 45}{2}} - 2025^{\lg \sqrt{10}}$. |
| 5p | 2. Determinați valorile numărului real, nenul m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_m(x) = mx^2 + (2m - 1)x + m - 1$ aparține primei bisectoare a sistemului de axe de coordonate. |
| 5p | 3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x+1} - x = 1$. |
| 5p | 4. Fie mulțimile $A = \{0,1,2\}, B = \{0,1,2,3\}, \mathcal{F} = \{f / f: A \rightarrow B\}$. Calculați probabilitatea ca alegând o funcție din mulțimea $\mathcal{F}$, aceasta să fie injectivă. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3), B(1,4), G(2,4)$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC . Determinați ecuația dreptei ce trece prin A și este paralelă cu mediana dusă din vârful C al triunghiului ABC . |
| 5p | 6. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin \alpha + \cos \alpha = -1$. Să se calculeze $\operatorname{tg} 2\alpha$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Se consideră $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, iar pentru fiecare pereche de numere reale (a, b) , notăm $X(a, b) = aA - bI_2 \in M_2(\mathbb{R})$. |
| 5p | a) Arătați că $(X(a, 2a))^2 = O_2, \forall a \in \mathbb{R}$; |
| 5p | b) Aflați perechea de numere reale (a, b) pentru care $X(a, b) = A^{-1}$; |
| 5p | c) Verificați că $A = 2I_2 + X(1, 2)$ și calculați $A^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale pozitive se consideră legea de compoziție $x \circ y = \log_2(2^x + 2^y - 1)$ $\forall x, y \in [0; +\infty)$. |
| 5p | a) Arătați că legea " $\circ$ " este bine definită; |
| 5p | b) Demonstrați că legea este asociativă; |
| 5p | c) Rezolvați în $[0; +\infty)$ ecuația $\underbrace{a \circ \dots \circ a}_{4 \text{ ori}} = 2a$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1} - 3\ln(x+1)$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)^2}, x \in (-1, \infty)$. |
| 5p | b) Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. |
| 5p | c) Studiați dacă funcția f este bijectivă. |

5p

5p

5p

2. Fie funcțiile $f, F: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x-1}$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$,

și $F(x) = (2x^3 + 6x^2 + 2x - 10)\sqrt{x-1}$.

- a) Dacă $a = 1, b = -1, c = 0$, calculați $\int f(x+1)dx, x > 0$.
- b) Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care funcția F este o primitivă a funcției f .
- c) Dacă $a = 7, b = 16, c = 7$, determinați o primitivă a funcției f al cărei grafic intersectează dreapta cu ecuația $y = x + 10$ într-un punct cu abscisa 2.

Scoala in Papuci